統計物理学（米澤・掛谷担当） 2023 年度　期末試験

2024/01/24

問題

以下の設問 1 から 3 に解答せよ。ただし、ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数を $h = 2\pi\hbar$、虚数単位を i とする。

1. 以下の(a) – (f) から 3 問を選択し、解答せよ。
   - (a) 理想気体のエントロピーが示量性を持つためにはどのような性質を導入する必要があるか、簡単に議論せよ。
   - (b) ミクロカノニカル集団における状態数の役割と、カノニカル集団における分配関数の役割の類似性について、簡単に議論せよ。
   - (c) 二準位系が N 個集まった系の比熱の温度依存性について、簡単に議論せよ。
   - (d) ラグランジュの未定乗数法と、その統計物理での利用例について、簡単に説明せよ。
   - (e) 1 成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡の条件を議論せよ。
   - (f) フェルミ粒子とボース粒子の実例を挙げ、それらの違いについて説明せよ。粒子個別、粒子集団両方の性質について言及すること。

2. 一粒子エネルギーが、ある正の定数 a と整数 $n \geq 0$ を用いて $\varepsilon_n = na$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ と表せるような一粒子系が、N 個集まっている。各一粒子状態はほとんど独立であるとする。この N 粒子系が、温度 T の熱浴と接しているカノニカル集団であるとして、以下の問いに答えよ。
   - (a) この N 粒子系の分配関数 Z を求めよ。
   - (b) この系のヘルムホルツ自由エネルギー F、内部エネルギー U、比熱 C を求めよ。
   - (c) この系で、$n = 0$ 以外の状態のエネルギーがある定数 b（> 0）だけ上昇した。この場合のヘルムホルツ自由エネルギーを求めよ。
   - (d) (c) の場合に、$T \gg a$ での物理量は b に依存しない。その理由の物理的描像について簡潔に説明せよ。

3. ギャップの大きさが E_g であるような 3 次元真性半導体のキャリア濃度の温度依存性を考える。ここで、電子の化学ポテンシャルは温度 T に依存し、μ と置く。フェルミディラック分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_\mathrm{B}T}+1} \tag{1}$$

と表される。

(a) 温度 $T > 0$ において、伝導帯にあるエネルギー準位のひとつ ε_i に励起されている電子の数、価電子帯にあるエネルギー準位のひとつ ε_j に残っている電子の数をそれぞれ表せ。なお、考察しているエネルギー領域において、状態密度は一定であると考えて良い。

(b) 価電子帯の上端をエネルギーの原点に取り、運動量 $\mathbf{p}$ の電子と正孔のエネルギーは電子と正孔の対称性からそれぞれ $E_\mathrm{g} + \mathbf{p}^2/2m_\mathrm{e}$, $-\mathbf{p}^2/2m_\mathrm{h}$ となるとする。ここで $m_\mathrm{e}, m_\mathrm{h}$ はそれぞれ電子、正孔の質量である。低温、すなわち $k_\mathrm{B}T \ll E_\mathrm{g} - \mu$ かつ $\mu \ll k_\mathrm{B}T$ の条件での電子および正孔濃度 n, p をボルツマン近似を用いて表せ。ヒント：運動量空間の 3 自由度で積分し、ガウス積分の公式を用いて計算する。

(c) 真性半導体では $n = p$ であることから、化学ポテンシャル μ の温度依存性を求めよ。

公式集

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_{i=1}^{n} e^{-\varepsilon_i/k_\mathrm{B}T}$ ここで、ε_i は粒子の取りうる状態 i のエネルギー

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_BT\ln Z$

全エネルギー $U = k_\mathrm{B}T^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z$

等比級数の和 $\sum_{n=1}^{N} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$

微分公式 1 $\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

積分公式 1 $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$

以上