

問題

以下の設問 1 から 3 に解答せよ。ただし、ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を $h = 2\pi\hbar$ 、虚数単位を i とする。

1. 以下の(a) – (e) から 3 問を選択し、解答せよ。

- (a) 多数のコインを投げたとき、表と裏が出る数がそれぞれ半分になる確率が最も高いことを、ボルツマンの原理と関連させて説明せよ。
- (b) 実在のひとつの具体的な物理系（例えばコップの中に入れた水など）を挙げ、カノニカル集団およびグランドカノニカル集団としての考えかたをそれぞれ説明せよ。
- (c) 1 成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡の条件を議論せよ。
- (d) フェルミ粒子とボース粒子の実例を挙げ、それらの違いについて説明せよ。
- (e) 相転移における臨界指数について説明せよ。

2. 自由電子に外部磁場 H を加えた時、電子ひとつのエネルギーは $\pm g\mu_B H$ のいずれかを取る。ここで、 g, μ_B は物理定数であり、電子系の温度は T に保たれている。

(a) N 電子系の分配関数 Z を求めよ。

(b) この系のヘルムホルツ自由エネルギー F から磁化 $M = -\frac{\partial F}{\partial H}$ と比熱 $C = \frac{\partial U}{\partial T}$ を求め、それぞれの T および H 依存性を図示せよ。なお、全エネルギー $U = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$ である。

3. 真性半導体の電気伝導のキャリア濃度の温度依存性を考える。ここで、電子の化学ポテンシャルは温度 T に依存し、 μ と置く。フェルミディラック分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} + 1} \quad (1)$$

と表される。

- (a) 温度 $T > 0$ において、伝導帯にあるエネルギー準位のひとつ ε_i に励起されている電子の数、価電子帯にあるエネルギー準位のひとつ ε_j に残っている電子の数をそれぞれ表せ。
- (b) 価電子帯の上端をエネルギーの原点に取り、運動量 $\mathbf{p}$ の電子と正孔のエネルギーは電子と正孔の対称性からそれぞれ $E_g + \mathbf{p}^2/2m_e$, $-\mathbf{p}^2/2m_h$ となるとする。ここで m_e, m_h はそれぞれ電子、正孔の質量である。低温、すなわち $k_B T \ll E_g - \mu$ かつ $\mu \ll k_B T$ の条件での電子および正孔濃度 n, p をボルツマン近似を用いて表せ。ヒント：運動量空間の 3 自由度で積分し、ガウス積分の公式を用いて計算する。
- (c) 真性半導体では $n = p$ であることから、化学ポテンシャル μ の温度依存性を求めよ。

公式集

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ (n は整数)

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_{i=1}^n e^{-E_i/k_B T}$ ここで、 $E_i (i = 1, \dots, n)$ は粒子の取りうるエネルギー

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$

全エネルギー $U = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$

等比級数の和 $\sum_{n=1}^N a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$

微分公式 1 $\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

積分公式 1 $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

以上