統計物理学（掛谷担当） 2021年度　期末試験

2022/01/26

問題

以下の設問1から3に解答せよ。ただし、ボルツマン定数をk_B、プランク定数を$h = 2\pi\hbar$、虚数単位をiとする。

1. 以下の(a), (b)から1問、(c), (d)から1問の計2問を選択し、解答せよ。
   - (a) 多数のコインを投げたとき、表と裏が出る数がそれぞれ半分になる確率が最も高いことを、ボルツマンの原理と関連させて説明せよ。
   - (b) 実在のひとつの具体的な物理系（例えばコップの中に入れた水など）を挙げ、カノニカル集団およびグランドカノニカル集団としての考えかたをそれぞれ説明せよ。
   - (c) 1成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡の条件を議論せよ。
   - (d) $T = 0$と$T > 0$の場合について、フェルミ・ディラック分布関数を図示し、フェルミ気体（相互作用のないフェルミ粒子集団）の化学ポテンシャルの温度依存性を説明せよ。

2. ミクロカノニカル集団の考え方を用いて、エネルギー固有値$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$を持つ角振動数$\omega$の固定された一次元調和振動子$N$個$(N \gg 1)$からなる系を考える。ここで、$n = 0, 1, 2, \cdots$である。
   - (a) 振動子iのエネルギーを$\left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$等とすると、この系の全エネルギーは$M = \sum_{i=1}^{N} n_i$として$E = \left(M + \frac{N}{2}\right)\hbar\omega$ $(M \gg 1)$と表せる。この時、全エネルギーEを各振動子に分配する場合の数$W(E)$をMとNで表せ。
   - (b) このときのエントロピーSを求めよ。
   - (c) 系の温度がTのとき、
     $$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \tag{1}$$
     が成り立つ。このとき、全エネルギーEをMを用いずに表せ。
   - (d) 定積比熱$C = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$を求め、その温度依存性を図示せよ。

3. 相互作用しない質量 m の電子 N 個からなる、体積 V、温度 T の自由電子ガスを考える。このとき、1 電子の波動関数は、

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \propto \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{2}$$

で表される。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$t$、$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$、$\omega$ はそれぞれ実空間の座標、時間、電子の波数、振動数である。

(a) 自由電子ガスが 1 辺 $L = V^{1/3}$ の立方体の中にあるとして、周期的境界条件を導入すると、例えば x 成分について $\psi(x + L) = \psi(x)$ が成り立つ。このとき電子の運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ とエネルギー ϵ の取り得る値を示せ。

(b) 1 電子のエネルギーが ϵ_0 より小さくなる電子の量子状態の数を求めよ。

(c) 絶対零度（$T = 0$）における電子の持つ最大エネルギー ϵ_F を求めよ。

公式集

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_{i=1}^{n} e^{-E_i/k_B T}$ ここで、$E_i (i = 1, \cdots, n)$ は粒子の取りうるエネルギー

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$

全エネルギー $U = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$

等比級数の和 $\sum_{n=1}^{N} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$

積分公式 1 $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

以上