統計物理学（掛谷担当） 2019 年度　期末試験

2020/01/29

問題

以下の設問 1 から 3 に解答せよ。ただし、ボルツマン定数を k_B、プランク定数を $h = 2\pi\hbar$、虚数単位を i とする。

1. 以下の各問のうち、<u>2 問を選択し</u>、解答せよ。

   (a) エネルギー等分配の法則を説明し、2 原子分子理想気体のエネルギーについて、運動の自由度に着目し、古典論に基づいて説明せよ。

   (b) 固体の格子振動を説明するモデルとして、アインシュタインモデルとデバイモデルが提唱された。これらふたつの違いを述べよ。

   (c) $T = 0$ と $T > 0$ の場合について、フェルミ・ディラック分布関数を図示し、フェルミ粒子の化学ポテンシャルの温度依存性について議論せよ。

   (d) ボース・アインシュタイン凝縮が非自明であることを調和振動子系との比較から説明せよ。

2. 固有振動数 ω の一次元調和振動子を量子論的に取り扱った場合、エネルギー準位は

$$\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

   と表せる。

   (a) 調和振動子 1 個の分配関数は、

$$z = \frac{1}{2\sinh(\hbar\omega/2k_BT)} \tag{2}$$

   であることを示せ。

   (b) 調和振動子 N 個からなる系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

   (c) エントロピー $S = (E - F)/T$ を求めよ。ここで、E は N 粒子系の全エネルギーである。

3. ある表面に n 個まで粒子を吸着できる吸着中心が N 個ある。吸着中心に k 個の粒子が吸着している状態のエネルギーを $k\varepsilon_0 (k = 0, 1, \cdots n)$ とする。

   (a) 吸着粒子の化学ポテンシャルを μ として、吸着した粒子系の大分配関数 Ξ を求めよ。

   (b) 吸着した粒子数の期待値は $k_B T \dfrac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi$ で得られる。温度 T における 1 吸着中心当たりの平均の吸着粒子数を求めよ。

   (c) $n = 1$ および $n = \infty$ のときについて、温度 T における 1 吸着中心当たりの平均の吸着粒子数をそれぞれ求めよ。計算過程は無くてもよい。

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $\displaystyle z = \sum_{i}^{n} e^{-E_i/k_B T}$

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$

全エネルギー $E = k_B T^2 \dfrac{\partial}{\partial T} \ln Z$

等比級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$

以上