統計物理学 小テスト 1

2016/12/21

1. 磁場 B のもとで、磁気モーメントの z（磁場方向）成分として $\mu, -\mu$ を取り得る粒子 N 個からなる系を考える。このとき、粒子のエネルギーは磁場によってそれぞれ $\mu B, -\mu B$ だけ変化する。カノニカル分布の考えを用いてこの系の分配関数を求め、自由エネルギー、エントロピー、比熱および磁化を求めよ。

2. 理想気体のモデルとして、一辺 L で体積 $V = L^3$ の立方体の容器中に閉じ込められた量子力学的な粒子を考える。

   (a) まず、1 粒子について考える。波動関数 $\psi(x, y, z; t)$ の周期的境界条件（例えば $\psi(x + L, y, z; t) = \psi(x, y, z; t)$）より、運動量 $\boldsymbol{p}$ と 1 粒子エネルギー ϵ のとりうる値を示せ。

   (b) 1 粒子エネルギー ϵ より小さい量子状態の数 $\Omega(\epsilon)$ を求めよ。$\Omega(\epsilon)$ は運動量空間における半径 $\sqrt{2m\epsilon}$ の球内部に含まれるとりうる $\boldsymbol{p}$ の数に相当する。

   (c) 独立な N 粒子系におけるエネルギー E のとりうる値を示せ。

   (d) N 粒子系における $\Omega(E)$ を求めよ。ただし、n 次元空間における半径 R の球の体積は $V_n(R) = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n$（$\Gamma(z)$ はガンマ関数）である。

   (e) エネルギーが E と $E + \Delta E$ の間にある状態密度 $W(E) = \dfrac{d\Omega(E)}{dE}\Delta E$ より、エントロピー $S = k_B \log W(E)$ を求めよ。ただし、量子力学的要請から、粒子同士は区別できないことに注意せよ。

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \displaystyle\sum_i^n e^{-E_i/k_B T}$

以上