統計物理学（掛谷担当） 平成28年度　期末試験

2017/01/25

問題

以下の設問1から3に解答せよ。ただし、ボルツマン定数をk_B、プランク定数を$h = 2\pi\hbar$、虚数単位をiとする。

1. 以下の各問のうち、2問を選択し、解答せよ。
   - (a) エネルギー等分配の法則を説明し、2原子分子理想気体のエネルギーを求めよ。
   - (b) 1成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡状態を議論せよ。
   - (c) ミクロカノニカル集団、カノニカル集団、グランドカノニカル集団の違いを説明せよ。
   - (d) ボース・アインシュタイン凝縮について説明し、ボース・アインシュタイン凝縮で理解される物理現象の例を挙げよ。

2. 磁場Bのもとで、磁気モーメントの磁場方向成分としてμ, $-\mu$を取り得る粒子N個からなる一定温度Tの系を考える。このとき、粒子のエネルギーは磁場によってそれぞれμB, $-\mu B$だけ変化する。
   - (a) 系をカノニカル集団とみなして、分配関数Zを求めよ。
   - (b) 系の全エネルギー$U = -\dfrac{\partial}{\partial \beta}\log Z$を求めよ。ここで、$\beta = (k_B T)^{-1}$である。
   - (c) 比熱$C = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_B$および磁化$M = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial B}\right)_T$を求め、それぞれについて$\dfrac{k_B T}{\mu B}$を横軸とする温度依存性のグラフを書け。

3. 相互作用しない質量 m の電子 N 個からなる、体積 V、温度 T の自由電子ガスを考える。このとき、1 電子の波動関数は、

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \propto \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{1}$$

で表される。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$t$、$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$、$\omega$ はそれぞれ実空間の座標、時間、電子の波数、振動数である。

(a) 自由電子ガスが 1 辺 $L = V^{1/3}$ の立方体の中にあるとして、周期的境界条件を導入すると、例えば x 成分について $\psi(x + L) = \psi(x)$ が成り立つ。このとき電子の運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ とエネルギー ϵ の取り得る値を示せ。

(b) 1 電子のエネルギーが ϵ_0 より小さくなる電子の量子状態の数を求めよ。

(c) 絶対零度（$T = 0$）における電子の持つ最大エネルギー ϵ_F を求めよ。

(d) エネルギー ϵ の状態を占める平均の電子数を表す関数を示し、$T = 0$ および $T \neq 0$ について ϵ 依存性を図示せよ。

以上