統計物理学 小テスト

2018/12/05

以下の 4 問のうち、<u>2 問を選択し</u>、解答せよ。

1. 磁場 B のもとで、磁気モーメントの z 成分として μ, $-\mu$ を取り得る粒子 N 個からなる系を考える。このとき、それぞれの粒子のエネルギーは μB, $-\mu B$ となる。カノニカル分布の考えを用いてこの系の分配関数を求め、自由エネルギー、エントロピー、比熱および磁化を求めよ。

2. N 個の古典一次元調和振動子からなる系について、位相空間での積分により分配関数、自由エネルギー、エントロピーを求めよ。なお、この系のハミルトニアンは
$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right) \tag{1}$$
と書ける。

3. 温度による物体の発光について、温度 T の熱浴に接して熱平衡となっている体積 V の箱に空いた小穴からの輻射強度（空胴放射）を考える。
   (a) 箱の内部の電磁波を様々な振動数を持った定在波の重ね合わせ
   $$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{E}_k \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega_k t)] \tag{2}$$
   として考える。このとき、固有振動数が ω から $\omega + d\omega$ の振動子の数を $D(\omega)d\omega$ としたときの $D(\omega)$ を求めよ。ただし、体積 V の系に周期的境界条件を用いたとき、取り得る波数 $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は $\boldsymbol{k}$ 空間に $V/(2\pi)^3$ の密度で一様に分布している（偏波を考慮しない場合）。ヒント：式 (2) 自身は使用しない。
   (b) 箱の中の電磁場のエネルギー E を求める式を $D(\omega)$ を用いて書き表したのち、問 (a) の解答を用いて比熱が概ね T^3 に比例することを示せ。

4. 図 1 のように、$-e$ の電荷を持つイオン N 個が xy 平面内で格子定数 b の正方格子を作っている。イオンと同数の $+e$ の電荷を持つ粒子が図の白丸で示す各イオンの中心から a だけ離れた 4 つの位置のうちいずれか一つをそれぞれ占有するものとする。異なるイオンに属する粒子間の相互作用は十分に小さいものとして、以下の問いに答えよ。
   (a) 図において、陰イオンの右側（x の正方向）に陽イオンがあり、x 方向に電場 E をかけると、ひとつの陰イオン-陽イオン対の電気双極子モーメント ea のエネルギーは、eaE となる。この系の分配関数を求めよ。
   (b) このとき、系の電気双極子モーメント P の統計平均を温度の関数として求めよ。
   (c) xy 平面内の任意の方向に電場をかけたときの感受率 $(\partial P/\partial E)_{E=0}$ を求めよ。

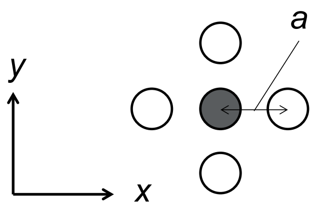

図 1: 陰イオン-陽イオン対

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_i^n e^{-E_i/k_B T}$

以上