

統計物理学 演習問題

2015/11/07

問題

以下の設問に答えよ。ただし、温度を T , ボルツマン定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K, プランク定数 $h = 2\pi\hbar = 6.6 \times 10^{-34}$ Js とする。

1. 空間に閉じ込められた気体が壁に及ぼす圧力 p は、気体分子が壁に衝突して跳ね返るときに与える力積の時間平均であると考えたとき、 $p = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}$ であることを示せ。ここで、 n は単位体積中の平均分子数、 $\bar{\epsilon}$ は気体分子 1 個あたりの平均運動エネルギーである。
2. 振動数 ω を持つひとつの振動子のエネルギー準位は

$$\epsilon = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる。全体 N 個の独立な振動子からなる系が、全エネルギー $E = \frac{N}{2}\hbar\omega + M\hbar\omega$ を持つ場合を考える。

- (a) 熱力学的重率 W を求めよ。
 - (b) この系の温度と E の関係を説明せよ。
3. N 個の独立な粒子からなる体積 V の系がある。1 粒子量子状態 i のエネルギーを ϵ_i としたとき、 i を占める平均の分子数 \bar{n}_i は

$$\bar{n}_i = Ne^{-\epsilon_i/k_B T} / \sum_i e^{-\epsilon_i/k_B T} \quad (2)$$

で与えられる (ボルツマン分布)。理想気体では、1 粒子量子状態は運動量空間に密度 $V/(2\pi\hbar)^3$ で均一に分布していることから、運動量 \mathbf{p} の 1 粒子状態を占める平均の分子数 $\bar{n}_{\mathbf{p}}$ を求めよ。

4. N 個の独立な粒子からなる系がある。各々の粒子は、 $-\epsilon_0, \epsilon_0$ のふたつのエネルギー状態しか取り得ないとする。全エネルギー $E = M\epsilon_0$ ($M = -N, \dots, N$) の状態の数 W_M を求め、 $E < 0$ の関係に限ってエネルギーと温度、比熱と温度の関係を求めよ。
5. 古典理想気体の状態方程式を統計力学を用いて導け。

以上