

量子論電子工学 2013 年前半部 (掛谷担当) 演習問題

2013/05/28

提出先: kakeya@kuee.kyoto-u.ac.jp

提出期限: 学期末 (あとで指定)

1. 一次元調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (1)$$

に摂動として,

$$H' = \frac{m\omega^2 \epsilon x^2}{2} \quad (2)$$

または

$$H' = m\omega^2 \epsilon x \quad (3)$$

が加わったときを考える.

(a) エネルギーのずれ ΔE を 2 次の摂動で求めよ.

(b) 厳密解と比較せよ.

2. 水素原子のシュレディンガー方程式を

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (4)$$

とおく.

(a) 極座標を取り, 波動関数を変数分離して $\psi(\mathbf{r}) = \chi(r)Y_{lm}(\theta, \phi)/r$ とおくと, 動径波動関数は以下の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \chi(r) = E\chi(r) \quad (5)$$

(b) 束縛状態の波動関数は

$$\chi(r) \sim r^{l+1} \quad (r \rightarrow 0) \quad (6)$$

$$\chi(r) \sim \exp[-\sqrt{-2mE/\hbar^2} \cdot r] \quad (r \rightarrow \infty) \quad (7)$$

であることを示せ.

(c) 新しい変数 $\rho = \kappa r$ (ただし, $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$) を導入し, $\chi(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho}w(\rho)$ と書くと, $w(\rho)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{d}{d\rho} + (\rho_0 + 2(l+1)) \right] w(\rho) = 0 \quad (8)$$

- (d) 級数展開によりエネルギー固有値を求めよ .
3. (a) 水素原子の動径波動関数を $n = 1, 2$ の場合に求め , その概形を図示せよ .
(b) Ze の電荷を持つ原子核と 1 個の電子からなる水素様原子において , $l = n - 1$ のとき , 動径確率密度が最大になるような r の値を求めよ .
(c) 水素原子の基底状態に対して , 同様な r の値を求めよ .
4. (a) $[\mathbf{L}, x^2 + y^2 + z^2] = [\mathbf{L}, p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] = 0$ を示し , $H = \mathbf{p}^2/2m + V(r)$ のとき $[\mathbf{L}, H] = 0$ となることを示せ .
(b) $[L_{\pm}, H] = 0$ のとき , $H\psi_{nlm} = E_{nl}\psi_{nlm}$ ならば , $H(L_{\pm}\psi_{nlm}) = E_{nl}L_{\pm}\psi_{nlm}$ を示し , 固有値 E_{nl} は $2l + 1$ 重に縮退していることを示せ .

以上