量子論電子工学 2012 年前半部（掛谷担当）演習問題

2012/05/29

提出先: `kakeya@kuee.kyoto-u.ac.jp`

1. 一次元調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

に摂動として,

$$H' = \frac{m\omega^2 \epsilon x^2}{2} \tag{2}$$

または

$$H' = m\omega^2 \epsilon x \tag{3}$$

が加わったときを考える.

 (a) エネルギーのずれ ΔE を 2 次の摂動で求めよ.

 (b) 厳密解と比較せよ.

2. 水素原子のシュレディンガー方程式を

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

とおく.

 (a) 極座標を取り，波動関数を変数分離して $\psi(\mathbf{r}) = \chi(r)Y_{lm}(\theta,\phi)/r$ とおくと，動径波動関数は以下の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right]\chi(r) = E\chi(r) \tag{5}$$

 (b) 束縛状態の波動関数は

$$\chi(r) \sim r^{l+1} \quad (r \to 0) \tag{6}$$

$$\chi(r) \sim \exp[-\sqrt{-2mE/\hbar^2}\cdot r] \quad (r \to \infty) \tag{7}$$

であることを示せ.

 (c) 新しい変数 $\rho = \kappa r$（ただし，$\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$）を導入し，$\chi(\rho) = \rho^{l+1}\mathrm{e}^{-\rho}w(\rho)$ と書くと，$w(\rho)$ は次の微分方程式を満たすことを示せ.

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + 2(l+1-\rho)\frac{d}{d\rho} + (\rho_0 + 2(l+1))\right]w(\rho) = 0 \tag{8}$$

 (d) 級数展開によりエネルギー固有値を求めよ.

3. (a) 水素原子の動径波動関数を $n = 1, 2$ の場合に求め，その概形を図示せよ．

   (b) Ze の電荷を持つ原子核と 1 個の電子からなる水素様原子において，$l = n - 1$ のとき，動径確率密度が最大になるような r の値を求めよ．

   (c) 水素原子の基底状態に対して，同様な r の値を求めよ．

4. (a) $[\boldsymbol{L}, x^2 + y^2 + z^2] = [\boldsymbol{L}, p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] = 0$ を示し，$H = \boldsymbol{p}^2/2m + V(r)$ のとき $[\boldsymbol{L}, H] = 0$ となることを示せ．

   (b) $[L_\pm, H] = 0$ のとき，$H\psi_{nlm} = E_{nl}\psi_{nlm}$ ならば，$H(L_\pm\psi_{nlm}) = E_{nl}L_\pm\psi_{nlm}$ を示し，固有値 E_{nl} は $2l + 1$ 重に縮退していることを示せ．

以上