統計物理学（掛谷担当） 2020 年度　期末試験

2021/01/27

問題

以下の設問 1 から 3 に解答せよ。ただし、ボルツマン定数を k_B、プランク定数を $h = 2\pi\hbar$、虚数単位を i とする。

1. 以下の各問のうち、<u>2 問を選択し</u>、解答せよ。

   (a) エネルギー等分配の法則を説明し、2 原子分子理想気体のエネルギーについて、運動の自由度に着目し、古典論に基づいて説明せよ。

   (b) ミクロカノニカル集団、カノニカル集団、グランドカノニカル集団の違いを説明せよ。

   (c) $T = 0$ と $T > 0$ の場合について、フェルミ・ディラック分布関数を図示し、フェルミ粒子の化学ポテンシャルの温度依存性について議論せよ。

2. 自由電子に外部磁場 H を加えた時、電子ひとつのエネルギーは $\pm g\mu_B H$ のいずれかを取る。ここで、g, μ_B は物理定数であり、電子系の温度は T に保たれている。

   (a) N 電子系の分配関数 Z を求めよ。

   (b) この系のヘルムホルツ自由エネルギー F から磁化 $M = -\dfrac{\partial F}{\partial H}$ と比熱 $C = \dfrac{\partial U}{\partial T}$ を求め、それぞれの T および H 依存性を図示せよ。なお、全エネルギー $U = k_B T^2 \dfrac{\partial}{\partial T} \ln Z$ である。

3. 温度による物体の発光について、温度 T の熱浴に接して熱平衡となっている体積 V の箱に空いた小穴からの輻射強度（空胴放射）を考える。

(a) 箱の内部の電磁波を理想ボース気体とみなせる多数の光子集団と考えた時に、角振動数 ω_r を持つ光子数の期待値 $\langle n_r \rangle$ を求めよ。ここで、光子は壁から箱内の空間に出入りするので、化学ポテンシャルを 0 として良い。

(b) 温度を上昇・低下させると、$\langle n_r \rangle$ および箱内部全体の光子数はどのように変化するか記述せよ。

(c) 角振動数が ω から $\omega + d\omega$ の振動子の数を $D(\omega)d\omega$ とすると、状態密度は

$$D(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{1}$$

と書ける。これを利用して、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ に分布する電磁波のエネルギー密度 $\rho(\omega)d\omega$ における $\rho(\omega)$ の式を示し、概形を図示せよ。

公式集

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_{i=1}^{n} e^{-E_i/k_B T}$ ここで、$E_i (i = 1, \cdots, n)$ は粒子の取りうるエネルギー

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \ln Z$

全エネルギー $U = k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$

等比級数の和 $\sum_{n=1}^{N} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$

積分公式 1 $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

以上