統計物理学（掛谷担当） 平成30年度　期末試験

2019/01/23

問題

以下の設問1から3に解答せよ。ただし、ボルツマン定数をk_B、プランク定数を$h = 2\pi\hbar$、虚数単位をiとする。

1. 以下の各問のうち、2問を選択し、解答せよ。
   (a) エネルギー等分配の法則を説明し、2原子分子理想気体のエネルギーを求めよ。
   (b) 固体の格子振動を説明するモデルとして、アインシュタインモデルとデバイモデルが提唱された。これらふたつの違いを述べよ。
   (c) $T = 0$と$T > 0$の場合について、フェルミ・ディラック分布関数を図示せよ。
   (d) ボース・アインシュタイン凝縮について説明し、ボース・アインシュタイン凝縮で理解される物理現象の例を挙げよ。

2. 温度による物体の発光について、温度Tの熱浴に接して熱平衡となっている体積Vの箱に空いた小穴からの輻射強度（空胴放射）を考える。
   (a) 箱の内部の電磁波を様々な振動数を持った定在波の重ね合わせ

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_k \boldsymbol{E}_k \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega_k t)] \tag{1}$$

   として考える。このとき、固有振動数がωから$\omega + d\omega$の振動子の数を$D(\omega)d\omega$としたときの$D(\omega)$を求めよ。ただし、体積Vの系に周期的境界条件を用いたとき、取り得る波数$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$は$\boldsymbol{k}$空間に$V/(2\pi)^3$の密度で一様に分布している（偏波を考慮しない場合）。ヒント：式(1)自身は使用しない。
   (b) 箱の中の電磁場のエネルギーEを求める式を$D(\omega)$を用いて書き表したのち、問(a)の解答を用いて比熱が概ねT^3に比例することを示せ。
   (c) 我々が目にする熱による発光現象（金属を熱すると温度に対応した色で光るなど）が、古典物理学と矛盾する理由を述べよ。また、空胴放射の振動子強度分布の概形を図示せよ。

3. ある表面に n 個まで粒子を吸着できる吸着中心が N 個ある。吸着中心に k 個の粒子が吸着している状態のエネルギーを $k\varepsilon_0(k=0,1,\cdots n)$ とする。

 (a) 吸着粒子の化学ポテンシャルを μ として、この系の大分配関数 Ξ を求めよ。

 (b) 温度 T における 1 吸着中心当たりの平均の吸着粒子数を求めよ。

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N-1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1)=n!, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z=\sum_i^n e^{-E_i/k_BT}$

ヘルムホルツの自由エネルギー $F=-k_BT\log Z$

等比級数の和 $\sum_{n=1}^{N} a_1 r^{n-1}=\frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$

以上