統計物理学（掛谷担当） 平成29年度　期末試験

2018/01/24

問題

以下の設問1から3に解答せよ。ただし、ボルツマン定数をk_B、プランク定数を$h = 2\pi\hbar$、虚数単位をiとする。

1. 以下の各問のうち、2問を選択し、解答せよ。

   (a) 等確率（等重率）の原理について説明せよ。

   (b) 1成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡状態を議論せよ。

   (c) ミクロカノニカル集団、カノニカル集団、グランドカノニカル集団の違いを説明せよ。

   (d) フェルミ粒子とボース粒子の実例を挙げ、それらの違いについて説明せよ。

2. 固有振動数ωの一次元調和振動子を量子論的に取り扱った場合、エネルギー準位は

$$\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

   と表せる。

   (a) 調和振動子1個の分配関数は、

$$z = \frac{1}{2\sinh(\hbar\omega/2k_BT)} \tag{2}$$

   であることを示せ。

   (b) 調和振動子N個からなる系のヘルムホルツの自由エネルギーFを求めよ。

   (c) エントロピー$S = (E - F)/T$を求めよ。ここで、EはN粒子系の全エネルギーである。

   (d) 本設問の結果をもとにして、固体の比熱について考察せよ。

3. 相互作用しない質量 m の電子 N 個からなる、体積 V、温度 T の自由電子ガスを考える。このとき、1 電子の波動関数は、

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) \propto \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{3}$$

で表される。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$t$、$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$、$\omega$ はそれぞれ実空間の座標、時間、電子の波数、振動数である。

(a) 自由電子ガスが 1 辺 $L = V^{1/3}$ の立方体の中にあるとして、周期的境界条件を導入すると、例えば x 成分について $\psi(x + L) = \psi(x)$ が成り立つ。このとき電子の運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{k}$ とエネルギー ϵ の取り得る値を示せ。

(b) 1 電子のエネルギーが ϵ_0 より小さくなる電子の量子状態の数を求めよ。

(c) 絶対零度（$T = 0$）における電子の持つ最大エネルギー ϵ_F を求めよ。

(d) エネルギー ϵ の状態を占める平均の電子数を表す関数を示し、$T = 0$ および $T \neq 0$ について ϵ 依存性を図示せよ。

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}$ （n は整数）

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi / a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_{i}^{n} e^{-E_i / k_B T}$

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \log Z$

等比級数の無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1 - r}$

以上