

問題

以下の設問に答えよ。ただし、温度を T 、ボルツマン定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K、プランク定数 $h = 2\pi\hbar = 6.6 \times 10^{-34}$ Js とする。

1. 以下の各問のうち、2問を選択し、解答せよ。

- (a) エネルギー等分配の法則を説明せよ。
- (b) 1成分系の圧力-温度相図を描き、「化学ポテンシャル」と「ギブスの相律」という語を用いて相平衡状態を議論せよ。
- (c) ミクロカノニカル分布、カノニカル分布、グランドカノニカル分布の違いを説明せよ。
- (d) フェルミ・ディラック分布関数およびボース・アインシュタイン分布関数を記せ。ただし、 E を粒子のエネルギー、 μ を化学ポテンシャルとする。

2. ハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q_i^2}{2} \right) \quad (1)$$

で記述できる N 個の一次元調和振動子からなる系について考える。ここで、 p_i, q_i は振動子 i のそれぞれ運動量と座標である。

- (a) 調和振動子を古典的に取り扱った場合、1粒子（振動子）分配関数 z は式(1)で決められるエネルギーの粒子が (p, q) 位相空間に分布していることから、以下のように表される:

$$z_c = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right) \right] dpdq. \quad (2)$$

z_c を計算せよ。

- (b) 量子論的に取り扱った場合、エネルギー準位が $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ となる。

i. 1粒子分配関数は、

$$z_q = \frac{1}{2 \sinh(\hbar\omega/2k_B T)} \quad (3)$$

であることを示せ。

ii. N 粒子系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ。

iii. エントロピー $S = (E - F)/T$ を求めよ。ここで、 E は N 粒子系の全エネルギーである。

3. 温度による物体の発光について、温度 T の熱浴に接して熱平衡となっている体積 V の箱に空いた小穴からの輻射強度（空腔放射）を考える。

(a) 箱の内部の電磁波を様々な振動数を持った定在波の重ね合わせ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \mathbf{E}_k \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)] \quad (4)$$

として考える。このとき、固有振動数が ω から $\omega + d\omega$ の振動子の数を $D(\omega)d\omega$ としたときの $D(\omega)$ を求めよ。ただし、体積 V の系に周期的境界条件を用いたとき、取り得る波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は \mathbf{k} 空間に $V/(2\pi)^3$ の密度で一様に分布している（偏波を考慮しない場合）。ヒント：式 (4) 自身は使用しない。

(b) 箱の中の電磁場のエネルギー E を求める式を $D(\omega)$ を用いて書き表したのち、問 (a) の解答を用いて比熱が概ね T^3 に比例することを示せ。

(c) 我々が目にする熱による発光現象（金属を熱すると温度に対応した色で光るなど）が、古典物理学と矛盾する理由を述べよ。また、空腔放射の振動子強度分布の概形を図示せよ。

数学公式

スターリングの式 $\log N! \simeq N(\log N - 1)$

ガンマ関数 $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi}$ (n は整数)

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$

1 粒子分配関数 $z = \sum_i^n e^{-E_i/k_B T}$

ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_B T \log Z$

等比級数の無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}$

以上